La géométrie du rectangle en amont de la géométrie de la réalité virtuelle selon Jean-Pierre Demailly

Jean-Pierre Ferrier
septembre 2012

La présentation traditionnelle de la géométrie, conforme dans ses grandes lignes à la vision d'Euclide et fondée sur l'étude du monde réel, peut se prévaloir d'être la première véritable science. En même temps, il n'est guère possible de donner à ses axiomes une formulation conforme aux standards modernes. En pratique, cette géométrie repose sur l'introduction des trois cas d'égalité des triangles, puis, plus tard, sur le postulat des parallèles.

Une présentation rigoureuse de la géométrie a été préconisée Jean-Pierre Demailly. Partant de la notion de distance, elle s'appuie sur l'existence de coordonnées dans lesquelles on puisse être la calculer par la formule classique. D'une certaine façon, on peut y voir une géométrie de la réalité virtuelle.

Les quelques pages qui suivent et qui concernent la géométrie élémentaire se placent à un niveau très pratique. C'est la classe de sixième qui est visée, pour préparer la mise en place, à partir de celle de cinquième, de l'une ou l'autre des stratégies précédentes.

On prendra ainsi en compte un certain nombre de contraintes entre lesquelles on tentera de trouver un compromis.

D'abord on s'attachera d'une part à ne pas déflorer la géométrie du triangle, en pensant aux élèves à qui sera proposée la présentation traditionnelle de la géométrie.

En même temps on veillera à ne pas imposer un lourd chapitre préliminaire à ceux pour qui on envisage la présentation rigoureuse ; on se contentera de ce qui en constitue une justification empirique ; précisément il s'agira de valider le théorème de Pythagore.

Dans les deux cas, on devra donc limiter strictement les ambitions ce chapitre. En effet des stratégies plus puissantes seront introduites dès l'année suivante.

Ensuite on essaiera, malgré tout, d'introduire une part de raisonnement à l'occasion de ces activités géométriques. Aujourd'hui la géométrie des classes de sixième et de cinquième ne se différencie en rien de celle de l'école élémentaire. On donne le vocabulaire des lignes, des angles, des triangles et de leurs droites remarquables, des quadrilatères particuliers, ainsi que leurs propriétés. La liste de ces dernières devient presque exhaustive au début du collège, constituant par exemple pour chaque quadrilatère particulier, parallélogramme exclu, une « fiche signalétique », avec une définition et de nombreuses propriétés, jusqu'à l'inventaire des symétries. Cependant rien n'est établi et surtout aucun moyen n'est donné de reconnaître une figure à partir de propriétés mentionnées dans la fiche et qui ne sont pas celles de la définition.

Enfin on tentera de rendre l'ensemble compréhensible par un élève de sixième, en multipliant les manipulations et en s'appuyant sur des problématiques concrètes.

Dans la vie courante, la figure géométrique la plus importante est le rectangle. C'est celle de la feuille de papier, du tableau, du dessus de la table. C'est celle du plan de nombreuses maisons, de la plupart de leurs pièces. C'est celle du bricoleur amateur qui doit réaliser une étagère. Or comment prépare-t-on le découpage à la scie d'une étagère rectangulaire de longueur et de largeur données ? Certainement pas en commençant par tracer quatre angles droits.

Plutôt que de parler en sixième de nombreux quadrilatères et surtout, pour chacun, de quantités de propriétés, nous proposons de nous concentrer sur le rectangle et de voir si nous ne pouvons pas développer déjà quelques petits raisonnements.

Soyons cependant clairs sur un point. Notre approche restera heuristique. Nous nous appuierons sur le mouvement pour définir, par superposition, l'égalité des figures. Nous utiliserons éventuellement la continuité du mouvement comme preuve d'existence. Il y aura, par ailleurs, beaucoup d'implicite dans ce qui nous servira de base. Nous ne cherchons pas, non plus, à en réduire la teneur.

Cela étant, nous invoquerons aussi un axiome, qui sera équivalent au postulatum des parallèles. Il n'en aura pas la légitimité, mais il aura l'avantage d'être directement liée au travail manuel ou à celui des machines.

La *ligne droite* n'aura pas été définie ; on l'aura juste « caractérisée » par la propriété usuelle : *par deux points distincts passe une ligne droite et une seule*. En particulier deux droites distinctes issues d'un même point ne peuvent pas se recouper.

Un *angle* aura été défini comme la figure composée par deux demi-droites de même sommet, qui seront ses *côtés*. L'angle est nul si les deux côtés sont confondus ; il est plat si les côtés sont opposés par le sommet.

Un angle coupe le plan en deux demi-plans. S'il n'est pas plat, la plus petite --- celle qui est l'intersection de deux demi-plans --- est le *secteur angulaire*.

Pour comparer deux angles, on superpose un côté de l'un et un côté de l'autre et place les autres dans le même demi-plan défini par les premiers. On peut alors comparer les secteurs angulaires. Suivant le cas, on dit qu'un des angles est *plus petit*, *égal* ou *plus grand* que l'autre.

On peut couper un angle en deux angles égaux. Il est clair qu'il n'y a qu'une façon de le faire. Que ce soit possible résulte du principe de continuité : on déplace une demi-droite d'un des côtés vers l'autre ; il y a une position pour laquelle l'égalité a lieu.

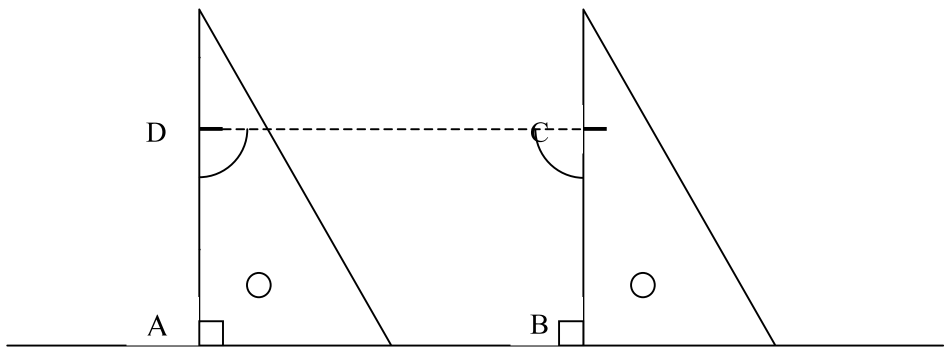
L'*angle droit* est défini comme la moitié de l'angle plat. On vérifie aisément que deux droites qui forment un angle droit en forment automatiquement quatre. On dit que les droites sont *perpendiculaires*.

Le début du rectangle, première version

Définition. Un rectangle est un quadrilatère dont tous les angles sont droits.

Cette définition ne prouve l'existence de rectangles, et a fortiori ne donne aucun moyen pratique d'en construire. Nous allons en énoncer un axiome, qu'on peut aisément vérifier par l'expérience et qui permet cette construction.

Axiome (du menuisier amateur). Si un quadrilatère ABCD a des angles droits en A et B et des côtés AD et BC égaux, c'est un rectangle.

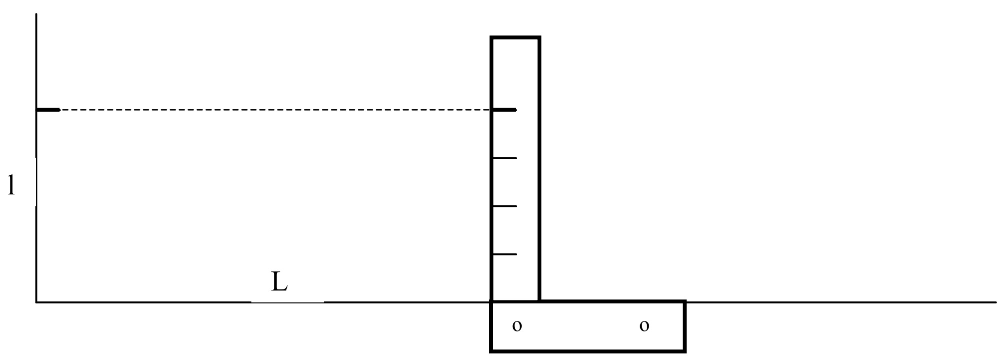


Notons que nous pouvons retourner le rectangle de façon à amener le sommet A en B et le sommet B en A, en le laissant du même côté de la droite AB. Alors le sommet C vient en D et le sommet D en C. En même temps, les angles en ces sommets sont échangés. Ils sont donc égaux. L'axiome que nous avons formulé dit que ces deux angles égaux sont droits.

Cependant l'opération de superposition que nous venons de réaliser applique le triangle ABC sur le triangle ABD. Ces derniers sont donc égaux également. En particulier

- les diagonales AC et BD sont égales.
- les angles BAC et ABD sont égaux.

En pratique.

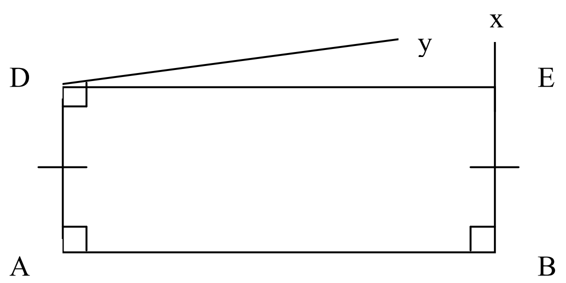


Voici comment on prépare la découpe à la scie d'une étagère rectangulaire de côtés L et l dans une grande planche rectangulaire ; on part d'un angle dont on a vérifié qu'il était bien droit ; on porte les longueurs L et l sur les côtés et la longueur l sur l'équerre de menuisier ; on fait glisser l'équerre jusqu'en L ; on marque enfin le quatrième sommet.

Nous pouvons énoncer deux résultats.

Théorème (de la découpe industrielle).
Dans un quart de plan défini par un angle droit de sommet A, on place un point B sur un côté et un point D sur l'autre. Alors les demi-droites perpendiculaires Bx en B à AB et Dy à D en AD se rencontrent en un point C et le quadrilatère obtenu est un rectangle.

Proposition. Dans un rectangle, les côtés opposés sont égaux.

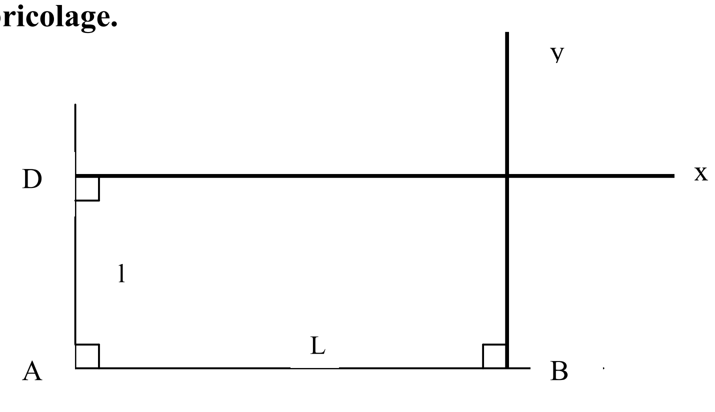


Démontrons le théorème. Considérons en effet un quadrilatère ABCD ayant des angles droits en A, B et D. Reportons la longueur AD sur la demi-droite Bx pour définir un point E tel que BE=AD. D'après l'axiome du menuisier amateur, le quadrilatère ABED est un rectangle. L'angle ADE est donc droit. Mais ADy l'est aussi par hypothèse. Ainsi la demi-droite Dy passe-t-elle par E.

Maintenant si l'on part d'un quadrilatère ABCD dont les angles en A,B, D sont droits, le raisonnement précédent montre que les points E et C sont confondus. Notamment l'angle en C est droit et AD = BC. Cela démontre la proposition.

En conséquence tout rectangle peut être obtenu par la méthode du menuisier, en prenant n'importe quel côté comme base. Notamment les diagonales sont égales.

Au magasin de bricolage.



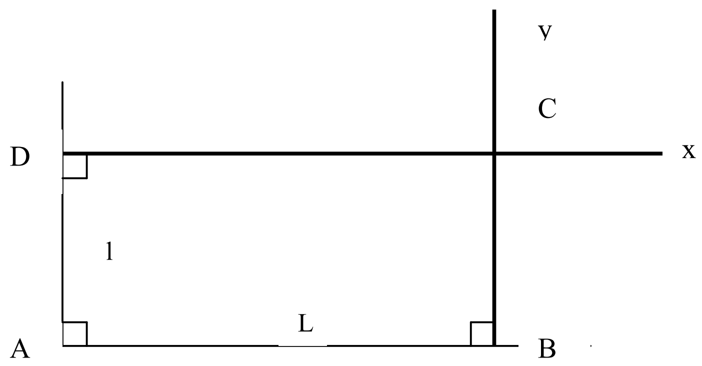
Pour la découpe automatique, l'équerre de menuisier est remplacée par un chariot portant une scie circulaire. L'opérateur pose verticalement une grande planche en calant un de ses angles, celui en A sur la figure, contre deux rails en angle droit. Ensuite il exécute deux traits de scie à angle droit par rapport aux rails, partant de points B et D tels que AB = L et AD = l.

Le début du rectangle, deuxième version

Définition. Un rectangle est un quadrilatère dont tous les angles sont droits.

Cette définition ne prouve l'existence de rectangles, et a fortiori ne donne aucun moyen pratique d'en construire. Nous allons en énoncer un axiome, qu'on peut aisément vérifier par l'expérience et qui permet cette construction.

Axiome (de la découpe industrielle).
Dans un quart de plan défini par un angle droit de sommet A, on place un point B sur un côté et un point D sur l'autre. Alors les demi-droites perpendiculaires Bx en B à AB et Dy à D en AD se rencontrent en un point C et le quadrilatère obtenu est un rectangle.

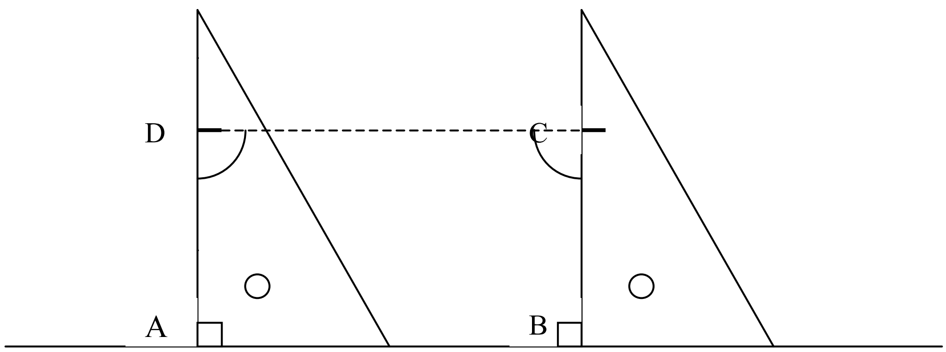


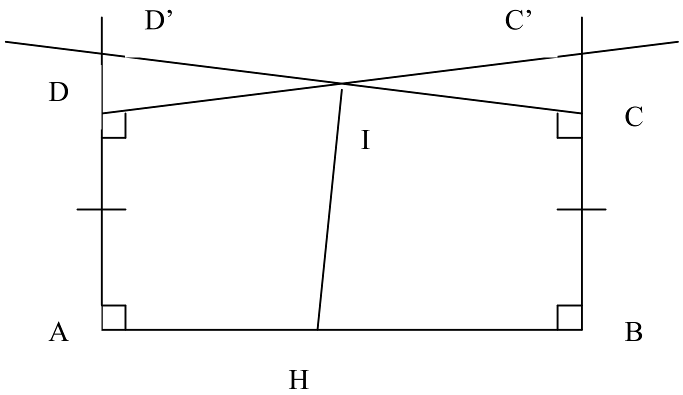
Au magasin de bricolage.

La découpe automatique utilise un chariot portant une scie circulaire. L'opérateur pose verticalement une grande planche en calant un de ses angles, celui en A sur la figure, contre deux rails en angle droit. Ensuite il exécute deux traits de scie à angle droit par rapport aux rails, partant de point B et D tels que AB = L et AD = l.

Il résulte notamment de l'axiome qu'un quadrilatère possédant trois angles droits en possède quatre ; autrement dit c'est un rectangle.

Théorème (du menuisier amateur). Si un quadrilatère ABCD a des angles droits en A et B et des côtés AD et BC égaux, c'est un rectangle.





Sur la seconde figure, nous n’avons pas tracé le côté CD. Nous pouvons retourner le rectangle de façon à amener le sommet A en B et le sommet B en A, en le laissant du même côté de la droite AB. Alors le sommet C vient en D et le sommet D en C. En même temps, les angles en ces sommets sont échangés. Ils sont donc égaux. Dans la figure on a pris le cas où ils sont tous deux aigus.

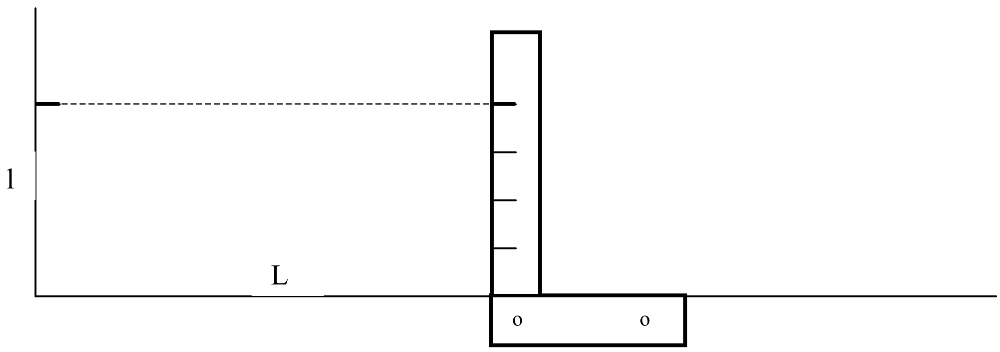
La demi-droite du quart de plan de l’angle droit en A, perpendiculaire au côté AD en D, coupe la demi-droite BC issue de B en un point C’ ; de même la demi-droite du quart de plan de l’angle droit en B, perpendiculaire au côté BC en C, coupe la demi-droite AD issue de A en un point D’. De plus les angles en C’ et D’ sont droits.

Les droites CD’ et C’D se coupent en un point I. La demi-droite perpendiculaire à ID’ en I coupe la droite AB en un point H et l’angle AIH est droit. Alors le quadrilatère AHID a trois angles droits ; L’angle DIH est donc droit et D, D’ sont confondus. De même C et C’ le sont. La démonstration est achevée.

Proposition. Les côtés opposés d’un rectangle sont égaux.

Soit ABCD un rectangle. Reportons la longueur AD sur la demi-droite BC issue de B pour définir un point E tel que BE=AD. D’après le théorème, le quadrilatère ABED est un rectangle. L’angle ADE est donc droit. Mais ADy l’est aussi par hypothèse. Ainsi la demi-droite Dy passe-t-elle par E.

En pratique.



Voici comment on prépare la découpe à la scie d’une étagère rectangulaire de côtés L et l dans une grande planche rectangulaire ; on part d’un angle dont on a vérifié qu’il était bien droit ; on porte les longueurs L et l sur les côtés et la longueur l sur l’équerre de menuisier ; on fait glisser l’équerre jusqu’en L ; on marque enfin le quatrième sommet

La suite du rectangle

Expérimentation. A l'aide d'une règle graduée et d'une équerre, on demande de tracer un rectangle dont les côtés mesurent respectivement 18cm et 6cm. Cependant on écartera d'un millimètre environ par rapport à la droite d'appui l'une des pointes de l'équerre, qui sera toujours la même. Comparer le résultat du tracé suivant qu'on utilise la méthode de l'amateur ou celle du professionnel.

Partant de ce que l'on sait maintenant, on voit qu'on peut empiler les rectangles comme des briques de lego. Le fait que les angles soient droits permet l'alignement des côtés. Le fait que les côtés opposés soient égaux permet de faire coïncider les sommets.

Les demi-rectangles.

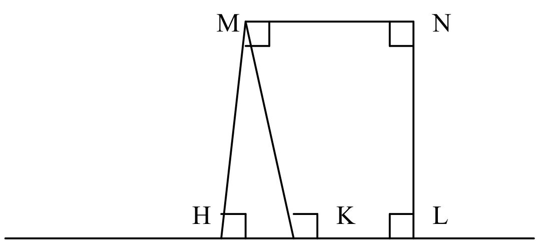
Lemme. Soit ABCD un rectangle. Les triangles ABC et CDB sont égaux. En particulier ils ont des angles égaux et même aire.

Amenons en effet les sommets C, D sur A,B en laissant le rectangle du même côté de AB. La diagonale AC reste en place et le triangle CDB vient en ABC.

La perpendiculaire à une droite menée par un point.

L'étude des rectangles nous permet d'énoncer en corollaire une propriété importante.

Proposition. Par un point M extérieur (ou non) à une droite D passe au plus une droite perpendiculaire à D.



Considérons d'abord un point M qui n'est pas sur la droite. Supposons, par l'absurde, que l'on puisse mener deux perpendiculaire par M, dont le pied est respectivement H et K. Prenons un troisième point L sur la droite, du même côté de H et K, et complétons LHM en un rectangle LHMN. Alors le quadrilatère LKMN a aussi trois angles droits. C'est un rectangle. Par suite l'angle KMN est droit et les côtés MH et MK sont confondus, ce qui est absurde. Le cas où M est sur la droite ne pose pas de problème.

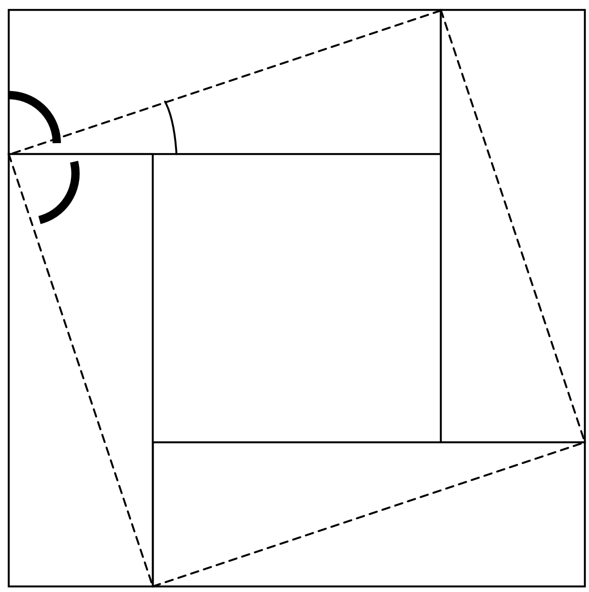
Pour le moment nous ne cherchons pas à donner de justification de l'existence de cette perpendiculaire dans le cas général. En revanche, si un point M est à l'intérieur d'un rectangle, on peut abaisser de ce point une perpendiculaire et une seule à l'un des côtés. Cela permet de définir des coordonnées dans un rectangle.

Le théorème fondamental.

Théorème (de Pythagore). La longueur c d'un rectangle de côtés a et b vérifie

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

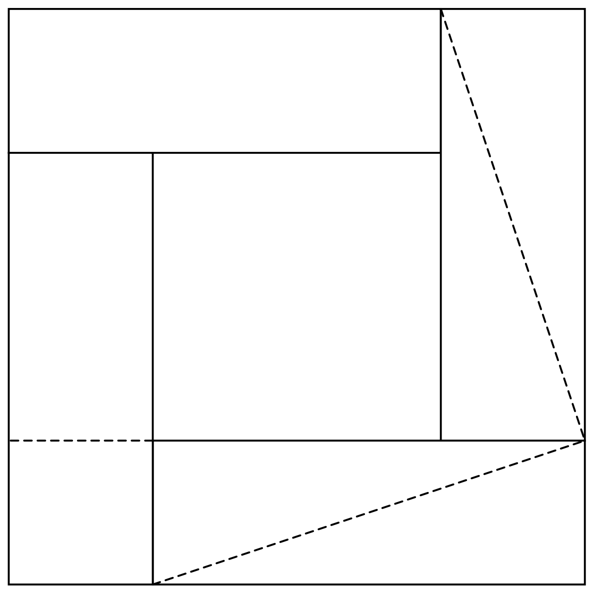
Nous allons assembler quatre rectangles de côtés a et b comme suit.



Le quadrilatère en pointillés est un rectangle : ses angles sont tous droits à cause de l'égalité des demi-rectangles. Sa surface est

$$c2.$$

Mais c'est aussi celle du grand carré privé de quatre demi-rectangles.



Si on enlève les quatre demi-rectangles marqués du grand carré, on trouve la surface du carré en pointillés précédent. Mais c'est la somme des surfaces du carré de côté a et du carré de côté $\underline{b}$, soit

$$a^2 + b^2.$$

QED.

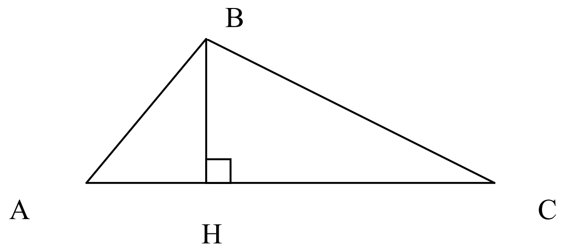
L'inégalité triangulaire

La ligne droite réalise toujours la distance la plus courte entre deux points. Cette propriété est exprimée par l'énoncé suivant.

Théorème. Soient A, B, C trois points du plan non alignés. On a l'inégalité stricte

$$AC < AB + BC.$$

Démontrons-le. Nous allons d'abord supposer les deux angles en A et C du triangle ABC aigus.



Dans ce cas nous pouvons mener de B la perpendiculaire à AC dont le pied est un point H du segment AC. Alors, par le théorème de Pythagore, il vient

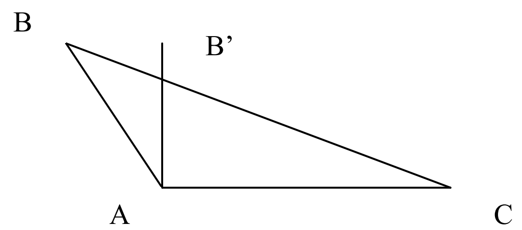
$AH < AB$,

$HC < BC$,

d'où

$AC = AH + HC < AB + BC$.

Supposons maintenant que l'angle en A soit droit ou obtu.



Alors la perpendiculaire en A à AC coupe le côté BC en B' et l'on a BC >= B'C > AC.

La suite.

On pourrait poursuivre avec la médiatrice, puis le losange. On pourrait aussi définir le parallélisme de deux droites et le relier aux rectangles, démontrant l'existence et l'unicité de la parallèle menée à une droite par un point extérieur.

La géométrie de la réalité virtuelle selon Jean-Pierre Demailly.

Dans le plan physique, la mesure la plus facile à réaliser est celle de la distance entre deux points. Dans un plan exempt d'obstacle, on tend pour cela, entre les points concernés, un ruban gradué inextensible. Ce sera, sur le terrain, un décamètre ou un double décamètre, par exemple. La tension du ruban assure que la mesure est prise le long du chemin « le plus court chemin ». On aura donc, par la méthode de mesure même, comme propriété de la distance, l'inégalité suivante, dite *inégalité triangulaire* :

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B),$$

laquelle vaudra pour tous les points A, B, C du plan.

Nous en avons donné une démonstration à partir du théorème de Pythagore.

Maintenant, supposons que l'on cherche à représenter une partie du plan géométrique sur l'écran d'un ordinateur. L'écran est constitué de points rangés en matrice, la colonne étant repérée par une *abscisse* x et la ligne par une *ordonnée* y ; les valeurs sont nulles à gauche et en haut. Oublions cependant le double fait que l'écran est limité à un rectangle et que les points n'y sont pas infiniment petits.

Pour passer du plan physique au plan virtuel de l'ordinateur, il nous faudra trouver (au moins) une façon d'attacher à chaque point du plan un couple x, y de longueurs algébriques, appelées *coordonnées*, de façon à caractériser ainsi les points du plan. Mais il nous faudra aussi savoir relier la distance physique aux coordonnées dont nous avons supposé la donnée. On fera l'hypothèse que

$$(d(A,B))^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

pour faire du plan physique ce que nous appellerons un *plan euclidien*.

L'approche heuristique que nous avons faite à l'occasion de la géométrie du rectangle, suivie en cinquième par la définition des coordonnées d'un point dans un repère du plan, nous a montré comment construire des coordonnées vérifiant la relation cherchée. Cela justifie notre démarche, mais allons désormais oublier comment nous avons procédé pour ne retenir que le résultat, à savoir que parler d'un plan euclidien n'est pas déraisonnable.

En effet, tout ce que nous allons chercher à faire à partir de maintenant sera d'étudier les propriétés d'un plan euclidien, mais d'une façon qui ne fasse jamais intervenir la façon particulière qui nous aurait conduit aux coordonnées. Autrement dit, nous chercherons en permanence à exprimer en termes géométriques les propriétés de ce plan.